**L.P J ALGEBRE /ANALYSE**

**TS1 Série N°2**

|  |
| --- |
| **FONCTIONS NUMERIQUES : RAPPELS ET COMPLEMENTS** |

**EXERCICE 1 :** 1) Prouver que toute fonction polynômia- le de degré impair possède au moins une racine.

2) On se propose de résoudre dans ℝ l’inéquation  . Soit la fonction g définie par :.

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l’équation g(x) = 0 admet une solution unique α ∈ [−1 ; 0].
3. Donner une valeur approchée de α à  près.
4. Déterminer alors la solution de l’inéquation.

**EXERCICE 2 :** Soit la fonction f définie par :

1. Etudier la parité et la périodicité de .
2. Vérifier que. Que peut-on déduire pour la courbe de .
3. On note (C1) la courbe représentative de sur Quelles transformations géométriques permettent de construire  à partir de (C1).
4. Démontrer que pour tout réel :

Donner le tableau de variations de à

1. Tracer dans .

**EXERCICE 3** : Etablir une formule donnant la dérivée n – ième de la fonction f ; n ∈ ℕ

1) f(x) = sin(ax + b) ; 2) f(x) = cos(ax+b).

3)  ; 4) 

**EXERCICE 4 :** 1) Dans chacun des cas suivants, déter- miner les primitives de la fonction f sur l’intervalle I :

a)   et I = ℝ ;

b)  et I = ]0, +∞[  ;

c)  et I = ]0, +∞[ ;

d)   et I = ]−∞, −3] ;

e)  et I = ]2 , +∞[ ( on pourra

déterminer trois réels a, b et c tels que ∀  ∈ I,  )  ;

I = ℝ  : f)  , g)  ,

h)  , i)  ,

j) 

2) Soit la fonction g :   . En remarquant que ∀  ∈ ,  , déterminer les primitives de g sur  .

**EXERCICE 5 :**

1. On pose,  étant un réel et n un entier naturel non nul : 
2. Déterminer la primitive  de  qui prend la valeur 1 en zéro.
3. En déduire une expression de  (sans points

de suspension), pour tout nombre réel .

1. soit  la fonction numérique définie sur  par .
2. Montrer que  est dérivable sur  et calculer  .
3. En déduire les primitives de 

**EXO 6 :** Soit f la fonction définie par  .

1. Calculer f ′(x) et f ″(x).
2. Montrer que ∀ n ∈ ℕ\*, ∀ x ∈ ℝ :,

 est un polynôme de degré n vérifiant :  .

**EXERCICE 7 :** Soit la fonction définie par numérique par .

1. Déterminer  ; justifier que l’ensemble d’étude de f peut être réduit à l’intervalle [0 ; π[.
2. Vérifier que sur [0 ; π[  admet une branche infinie, dont on précisera la nature.
3. Dresser le tableau de variation de f sur [0 ; π[
4. Tracer  sur [−2π ; 2π] ; préciser les coordon- nées de ses points d’inflexion.

**EXERCICE 8 :** 1) Soit g la fonction définie par :  .

1. Etudier les variations de g.
2. Démontrer que l’équation g(x) = 0 admet une et

une seule solution α et que α appartient à ]1,6 ; 1,7 [.

2) On considère la fonction f définie par : . On désigne par (C) la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité 4 cm).

1. Etudier les variations de f (on utilisera pour cela les résultats du 1°)).
2. Ecrire une équation de la droite (Δ) tangente à (C) au point d’abscisse zéro.

Etudier la position de (C) par rapport à (Δ) dans l’intervalle ]−1 ; 1].

1. Montrer que (C) est située au – dessus de sa tangente au point d’abscisse 1.
2. Tracer la courbe (C), la droite (Δ) et la tangente à (C) au point d’abscisse 1.

**EXERCICE 9 :** Soit f et g des fonctions numériques définies et dérivables sur I intervalle de ℝ telles que ∀ ∈ I g() ≠ 0 et f′()g() = f()g′(). Prouver alors qu’il existe un réel α constant tel que :

f() = α g() ∀ ∈ I.

**EXERCICE 10 :** Calculer les limites éventuelles suivantes :

1)  ; 2)  3)  ;   4)  ; 5)

6)  ; 7)  8) ; 9) ; 10) 11)

**EXERCICE 11 :** On considère la fonction  définie par :



1. Déterminer le domaine de définition de  puis calculer les limites aux bornes.
2. Etudier la continuité de  en 0.
3. Etudier la dérivabilité deaux points d’abscisses 0 et 1. Que peut – on en déduire pour  en ces points ?
4. Montrer que  est dérivable sur ℝ⎯ {0, 1} et calculer  sur chaque intervalle où est dérivable.
5. Résoudre dans ]0 ; 1[ l’inéquation :  . En déduire le signe de  sur ]0 ; 1[. Etudier le signe de sur les autres intervalles.
6. Dresser le tableau de variation de.
7. Etudier les branches infinies de ; on précisera les positons relatives de  et de ses asymptotes éventuelles.
8. Soit g la restriction deà l’intervalle I =[1 ; +∞[.
9. Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
10. Soit  la réciproque de g. Donner les variations de  sur J.
11.  est – elle dérivable en 2 ? Si oui calculer

()′(2).

1. Construire  et la courbe de  dans un repère.

**EXERCICE 12 :** Soit  une fonction définie et continue sur et telle que 

1. Démontrer qu’il existe un réel  tel que.
2. Supposons en outre que  soit dérivable sur 

et que, . Prouver qu’alors le réel est unique. Montrer par un contre-exemple que ce n’est pas toujours le cas quand la condition n’est pas remplie

**EXERCICE 13 :** On considère la fonction  définie pour tout réel  par : .

1. Etudier les variations de  .
2. a) Donner une équation de la tangente (T) à 

au point d’abscisse zéro.

b) Etudier la position de la courbe  par rapport à la tangente (T).

c) Montrer que le point A(0 ; 1) est centre de symétrie de  .

1. Tracer  .
2. Montrer que l’équation  admet une

unique solution α ∈ ]1 ; 2[. (On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g telle que  .)

1. a) Montrer que  est bijective de ℝ sur un intervalle de ℝ que l’on déterminera.

b) Définir sa fonction réciproque  en donnant son ensemble de définition, son ensemble d’arrivée et  en fonction de  .

1. Tracer la courbe de  .

**EXERCICE 14 :** 1) a) En utilisant l’inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout naturel n :  .

b) Retrouver ce résultat par un calcul algébrique.

2) Soit f la fonction numérique définie sur ℝ par :  .

1. Calculer f ′(x) et majorer  .
2. Montrer alors que, pour tous nombres réels a et b

de  ,  .

**EXERCICE 15 :**

1. Préciser, dans les cas suivants, si la fonction  satis

fait sur I = [a, b] aux conditions du théorème des accroissements finis. Si oui, déterminer explicitement les réels c tels que  :

1.  ,
2. 
3. On donne la fonction *f* définie sur ℝ par : 
4. Démontrer que l’équation  admet une solution unique ; et que .

Montrer qu’il existe un réel tel que : . Montrer que . En déduire que : 

**EXERCICE 16 :** Soit f la fonction définie par  sur  à valeurs dans [1 ; +∞[.

1. Démontrer que f admet une bijection réciproque 
2. Déterminer l’ensemble sur lequel  est dérivable et démontrer que sa dérivée est : 

**EXERCICE17 :** 1) Soit f la fonction de ]0 ; 2[ vers ℝ définie par  . Etudier f et tracer sa courbe représentative  .

2) Justifier que f est bijective ; Soit g sa fonction réciproque. Démontrer que g est dérivable sur ℝ et que sa dérivée est la fonction

g′ :   .

3) On considère la fonction h définie par :  . Etudier la dérivabilité de h sur son ensemble de définition et déterminer sa dérivée. En déduire la formule explicite de h sur ]−∞, 0[ et sur ]0, +∞[.